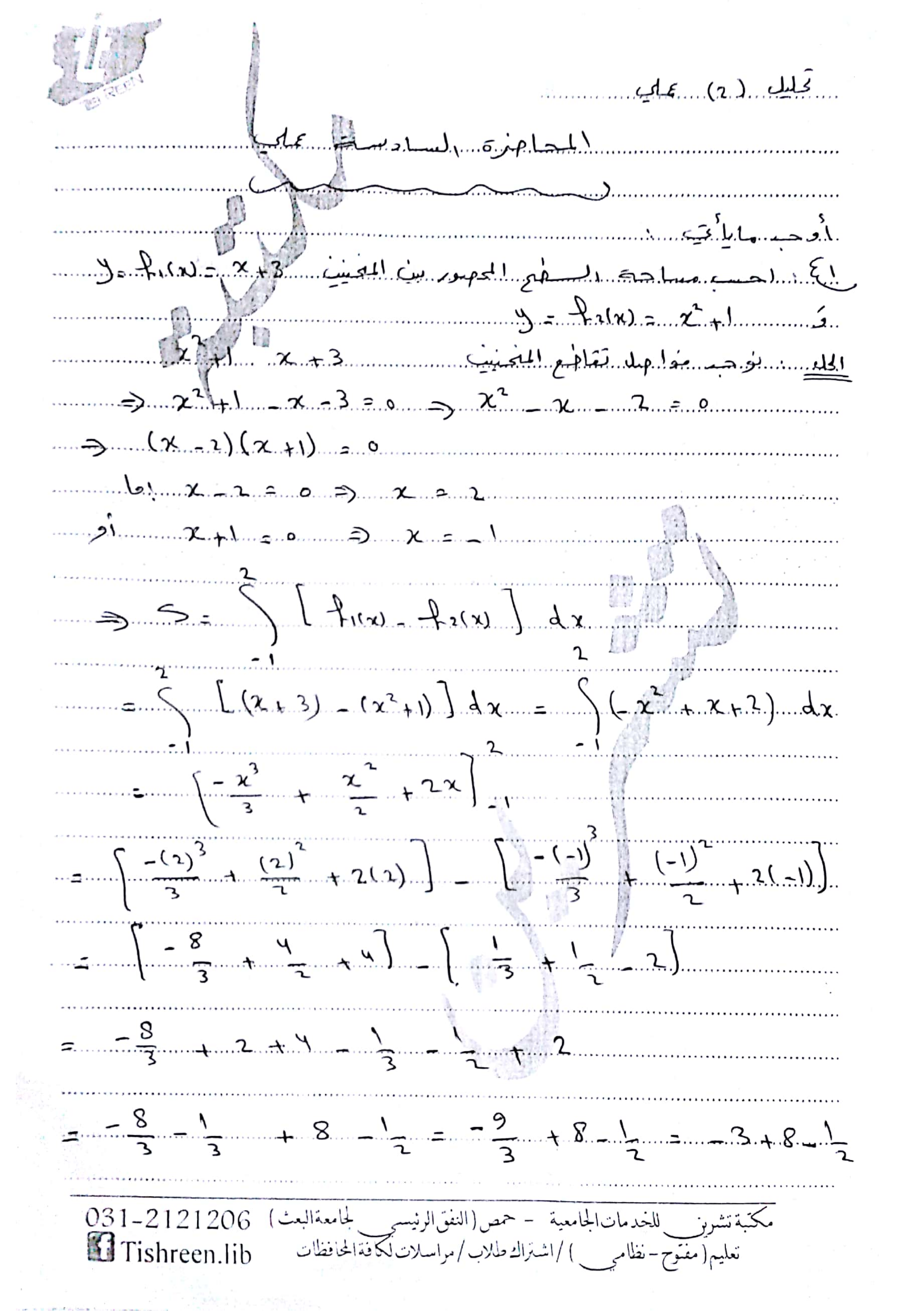


تحليل (2) عملي

المحاضرة السادسة عملي

أوجد ما يأتي:

1) احسب مساحة السطح المحصور بين المنحنيين $y = f_1(x) = x+3$

و $y = f_2(x) = x^2+1$

الحل: نوجد نقاط تقاطع المنحنيين $x^2+1 = x+3$

$\Rightarrow x^2+1-x-3=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

إما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^{2} [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(x+3)-(x^2+1)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\,dx$$

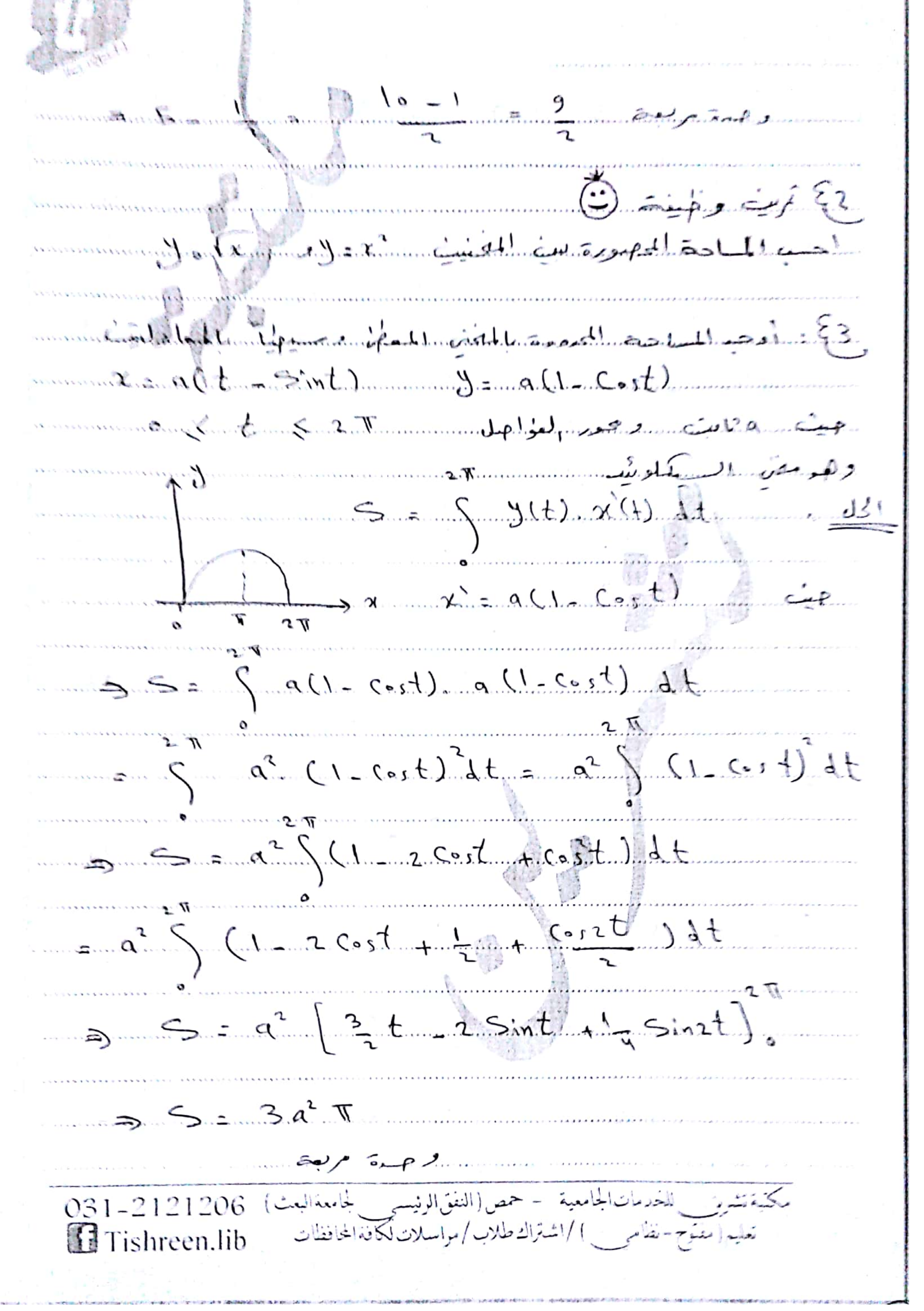
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{-(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2(2)\right] - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right]$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$$= -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 8 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{3} + 8 - \frac{1}{2} = -3 + 8 - \frac{1}{2}$$



$= \dots = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

ع٢ تريث وظيفة ☺

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$, $y = x$

ع٣: أوجد المساحة المحدودة بالمنحني المعطى وسيطياً بالمعادلتين

$x = a(t - \sin t)$ $\qquad$ $y = a(1 - \cos t)$

حيث a ثابت ومحور الفواصل $\qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

وهو منحني السيكلوئيد

الحل: $S = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t)\, dt$

حيث $x' = a(1 - \cos t)$

$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt$

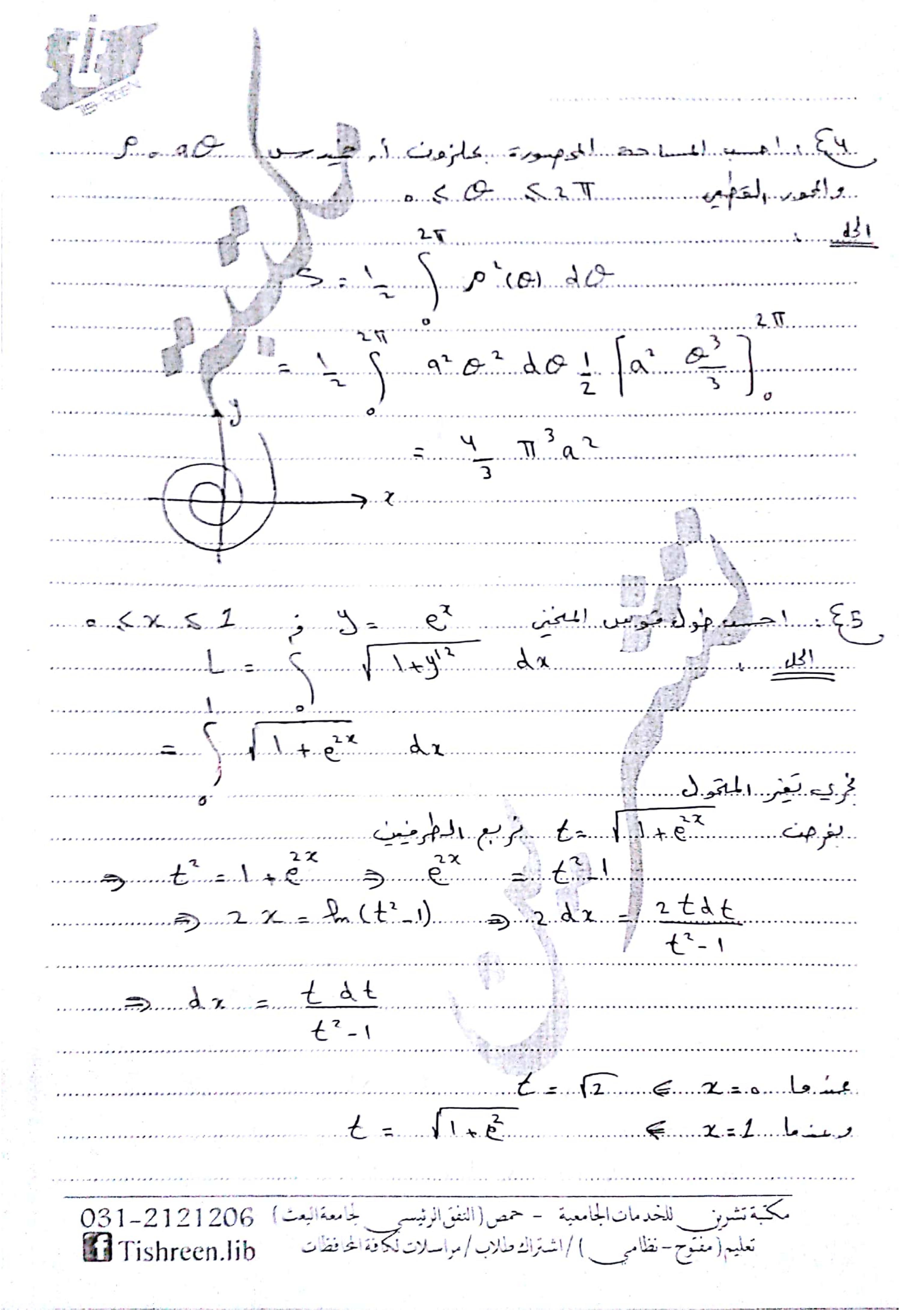
$\Rightarrow S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt$

$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2})\, dt$

$\Rightarrow S = a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi}$

$\Rightarrow S = 3a^2 \pi$

وحدة مربعة



٤٤: احسب المساحة المحصورة بحلزون أرخميدس $\rho = a\theta$
والمحور القطبي $0 \le \theta \le 2\pi$

الحل:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2\, d\theta \quad \frac{1}{2}\left[a^2 \frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

٤٥: احسب طول قوس المنحني $y = e^x$ ؛ $0 \le x \le 1$

الحل:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

نجري تغيير المتحول

بفرض $t = \sqrt{1+e^{2x}}$ نربع الطرفين

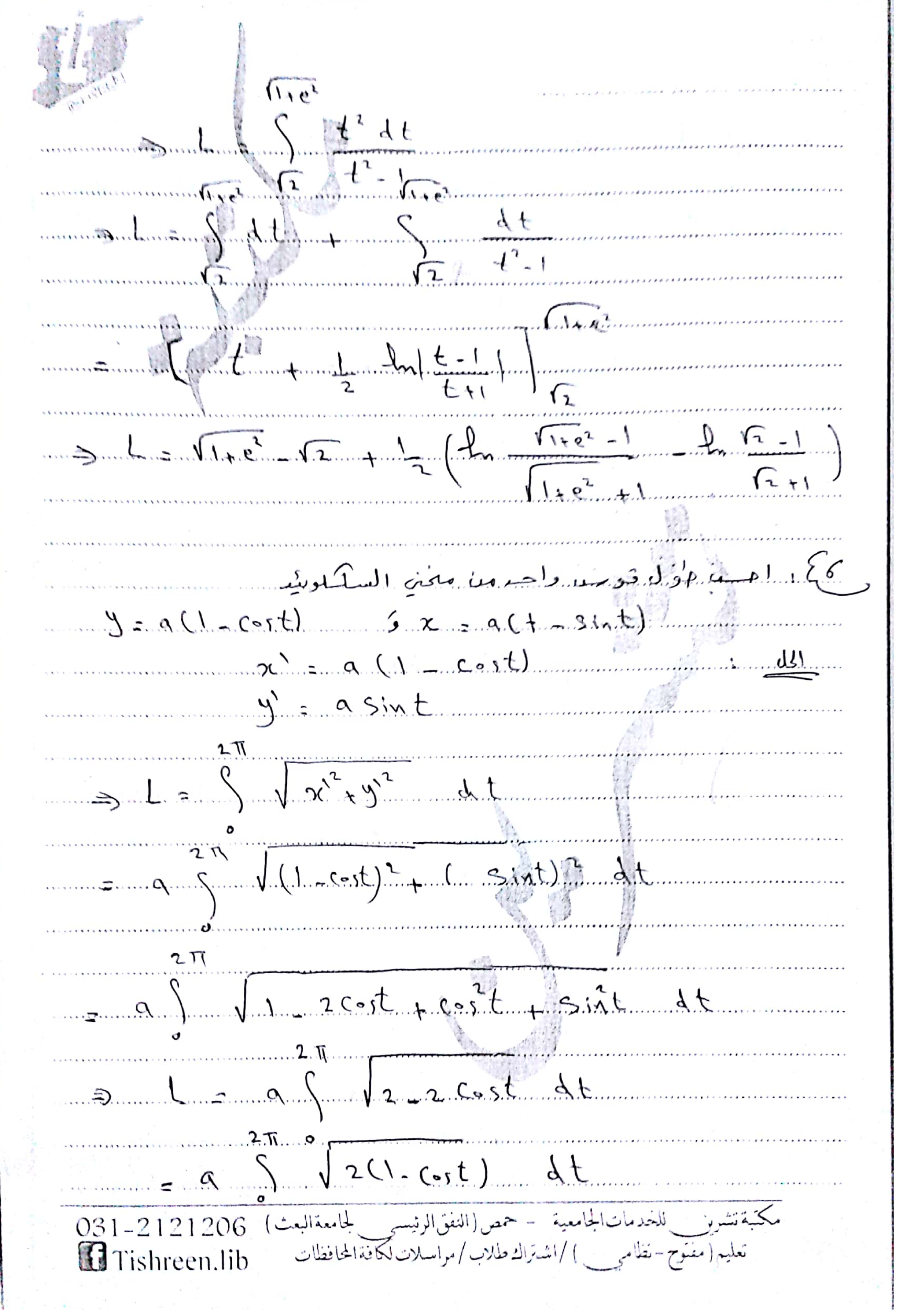
$$\Rightarrow t^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = t^2-1$$

$$\Rightarrow 2x = \ln(t^2-1) \Rightarrow 2\,dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{t^2-1}$$

عندما $x=0 \Leftarrow t=\sqrt{2}$

وعندما $x=1 \Leftarrow t=\sqrt{1+e^2}$



$$\Rightarrow L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2\,dt}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$$

٤٦) احسب طول قوس واحد من منحني السكلوئيد

$y = a(1-\cos t)$ ، $x = a(t-\sin t)$

الحل:

$x' = a(1-\cos t)$

$y' = a\sin t$

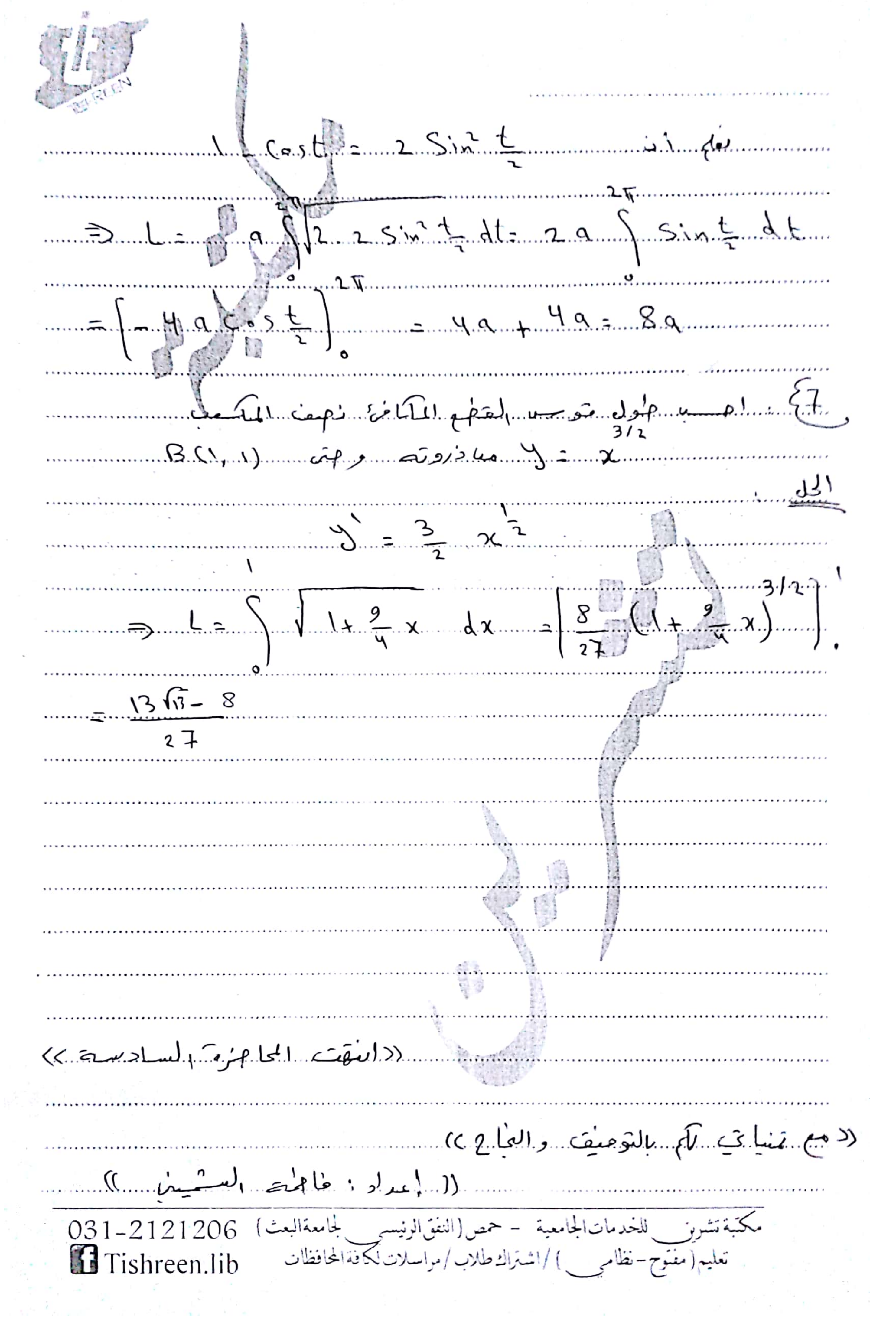
$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$$

$$\Rightarrow L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$



نعلم أن $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$

$$\Rightarrow L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$= \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a$$

٤7 : احسب طول قوس القطع المكافئ نصف المكعب $y = x^{3/2}$ من مبدئه وحتى $B(1,1)$

الحل :

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

« انتهت المحاضرة السادسة »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

« إعداد : فاطمة الشميني »